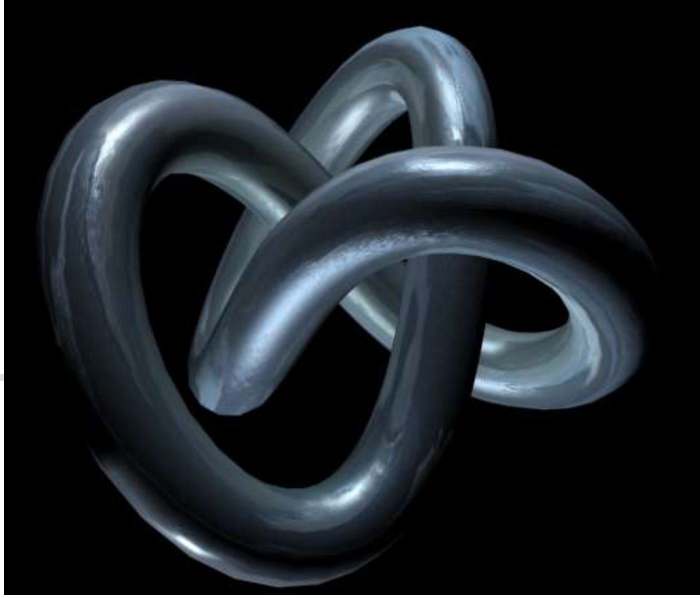
Компьютерная графика

лекция 5

Кривые
в компьютерной
графике

Параметрическое задание кривых на плоскости и в пространстве.



Параметрически заданной кривой называется множество точек M(x,y,z), координаты которых определяются соотношениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,

$0 \le t \le 1$. В векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Кривая называется ***регулярной***, если в каждой точке кривой существует касательная, положение которой меняется непрерывно вдоль кривой.

Геометрическим образом функции трех переменных *F*(x,y,z) служит поверхность. Чтобы определить положение точки на ней, нужны два *параметра U* и *V.*

Кривая Безье (Bezier).

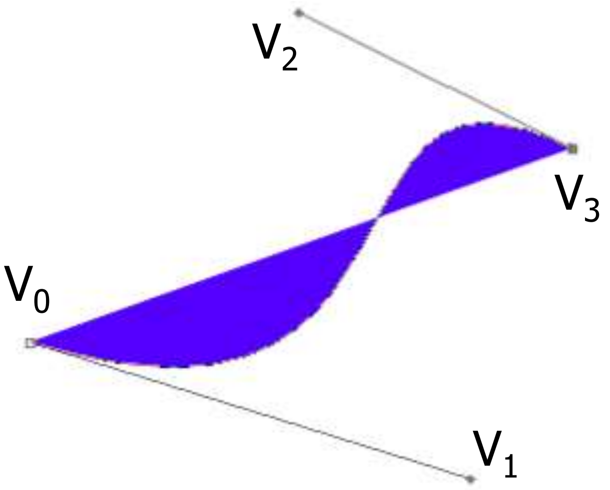
Пусть на плоскости или в пространстве задан набор *точек-ориентиров:*

$$\vec{V}_0, \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$$

Кривой Безье, определяемой этим набором точек, называется кривая, определяемая уравнением:

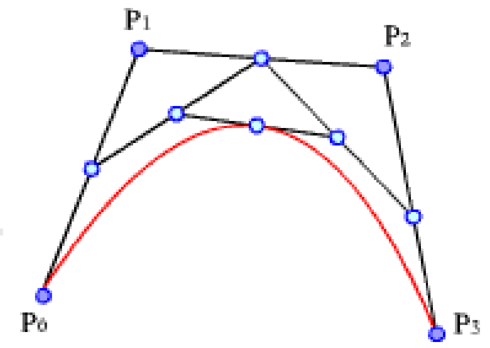
$$\vec{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \vec{V}_i$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad 0 \le t \le 1$$



Кривая Безье (Bezier).

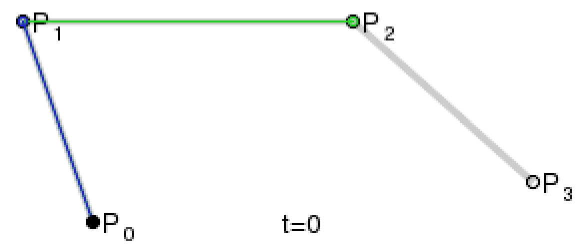
Для четырёх точек-ориентиров:



Способ вычерчивания куб. кривой Безье

$$\vec{r}(t) = (1-t)^3 \cdot \vec{V}_0 + 3t \cdot (1-t)^2 \cdot \vec{V}_1 + 3t^2 \cdot (1-t) \cdot \vec{V}_2 + t^3 \cdot \vec{V}_3$$

или в матричной записи:

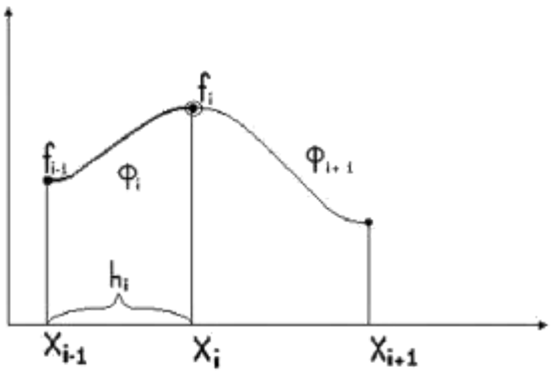


$$\vec{r}(t) = \overset{\frown}{V}\overset{\frown}{M}\vec{T}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad \overset{\frown}{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

Сплайны:
представление в декартовых координатах

$$\phi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

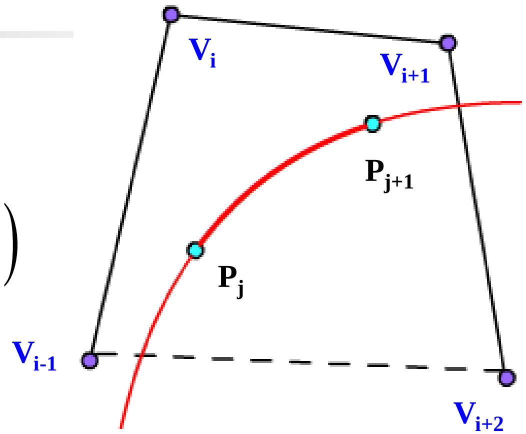


Пусть задан набор точек $\vec{V}_i(x, y)$, $i = 0,1\ldots n$.

Интерполяционным составным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. график функции проходит через каждую точку из заданного набора, т.е. $S(x_i) = y_i$;
2. на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1\ldots n$-1 функция $S(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j^i (x - x_i)^j$ является многочленом третьей степени.
3. На всём отрезке $[x_0, x_n]$ функция имеет непрерывными первую и вторую производную.

Сплайны:
B-сплайн (basic spline)



параметрическое представление:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{6}\left((1-t)^3\bar{V}_0 + \left(3t^3 - 6t^2 + 4\right)\bar{V}_1 + \left(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1\right)\bar{V}_2 + t^3\bar{V}_3\right)$$

$$0 \le t \le 1$$

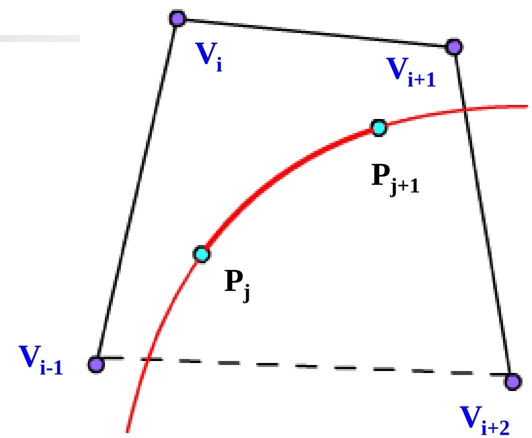
в матричной форме: $\vec{r}(t) = \overset{\frown}{V}\overset{\frown}{M}\vec{T}$

Построенная подобным образом кривая лежит внутри выпуклой оболочки заданных вершин (тетраэдра), в общем случае не проходя через эти точки.

$$\overset{\frown}{V} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \qquad \overset{\frown}{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Сплайны:
рациональный B-сплайн

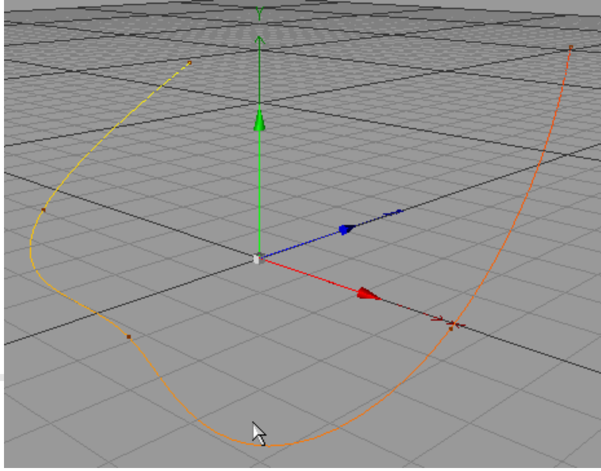
$$\vec{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} \omega_i n_i(t) \vec{V}_i}{\sum_{i=0}^{3} \omega_i n_i(t)}$$



$$0 \le t \le 1 \qquad n_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6} \qquad n_1(t) = \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6}$$

$$n_2(t) = \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} \qquad n_3(t) = \frac{t^3}{6} \qquad \omega_i > 0$$

Составная кубическая сплайновая кривая представляет собой объединение *n*-2 элементарных кубических сплайновых кривых (n – число «узлов»).



Сплайны:
β-сплайн (Beta-spline)

Кривая, построенная на основе однородного кубического B-сплайна, имеющая дополнительные параметры для учета локального наклона и гладкости.

$$\vec{r}_2(0)=\vec{r}_1(1)$$

$$\vec{r}_2{}'(0)=\beta_1 r_1{}'(1)$$

$$r_2{}''(0)=\beta_1^2 r_1{}''(1)+\beta_2 r_1{}'(1)$$

$$\beta_1,\beta_2>0$$

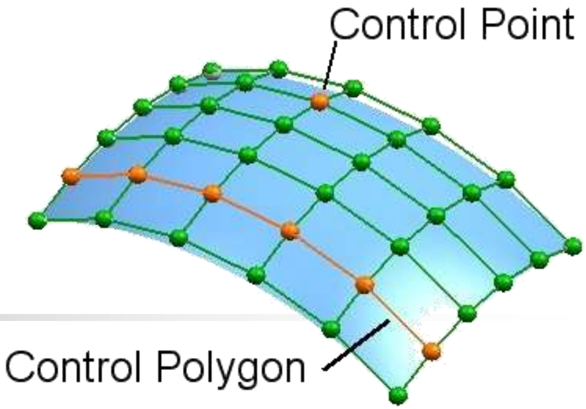
$$\vec{r}(t)=\overset{\frown}{V}\overset{\frown}{M}\vec{T}$$

$$\vec{V}=\left(V_{i-1},V_i,V_{i+1},V_{i+2}\right)$$

$$\overset{\frown}{M}=\begin{pmatrix} 2\alpha & -6\alpha & 6\alpha & -2\alpha \\ 4\left(\beta_1^2+\beta_1\right)+\beta_2 & 6\left(\alpha-\beta_1\right) & -3\left(2\alpha+\mu\right) & 2\left(\alpha+\nu\right) \\ 2 & 6\beta_1 & 3\mu & -2\left(\nu+1\right) \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha=\beta_1^3 \qquad \mu=2\beta_1^2+\beta_2 \qquad \nu=\beta_1^2+\beta_1+\beta_2$$

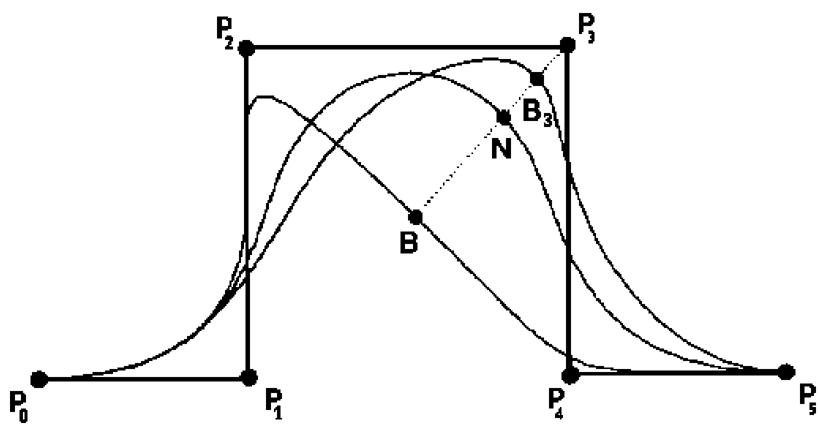
Сплайны:
NURBS



NURBS (nonuniform rational B-spline) – рациональные B-сплайны, заданные на неравномерной сетке по параметру *t.* Являются наиболее общим видом сплайнов. Основные свойства: просты в описании, инвариантны относительно масштабиро-вания, сдвига, вращения и перемещения. Для управления NURBS-объектами используются специальные точки, именуемые *контрольными узлами*. Все контрольные узлы NURBS-кривой находятся во взаимосвязи, воспринимают перемещения окружающих узлов и занимают таким образом новое положение, обеспечивающее цельность и гладкость линий и поверхностей.

x	*y*	*z*	**вес**
1	0	0	1
1	1	0	√2/2
0	1	0	1
−1	1	0	√2/2
−1	0	0	1
−1	−1	0	√2/2
0	−1	0	1
1	−1	0	√2/2
1	0	0	1

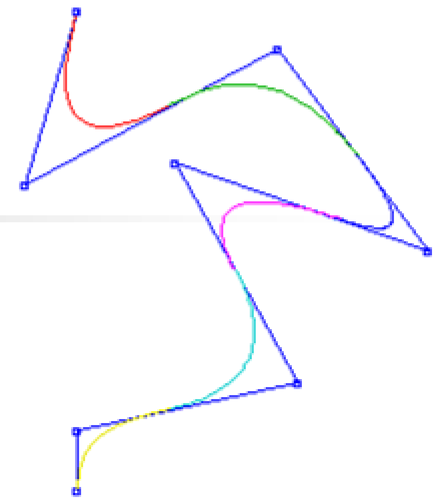
Построение окружности



http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm

Сплайны:
NURBS

NURBS кривая выражается параметрическим уравнением:

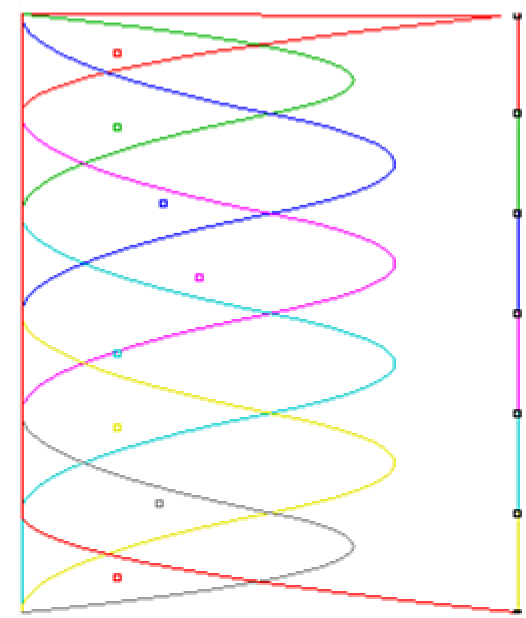


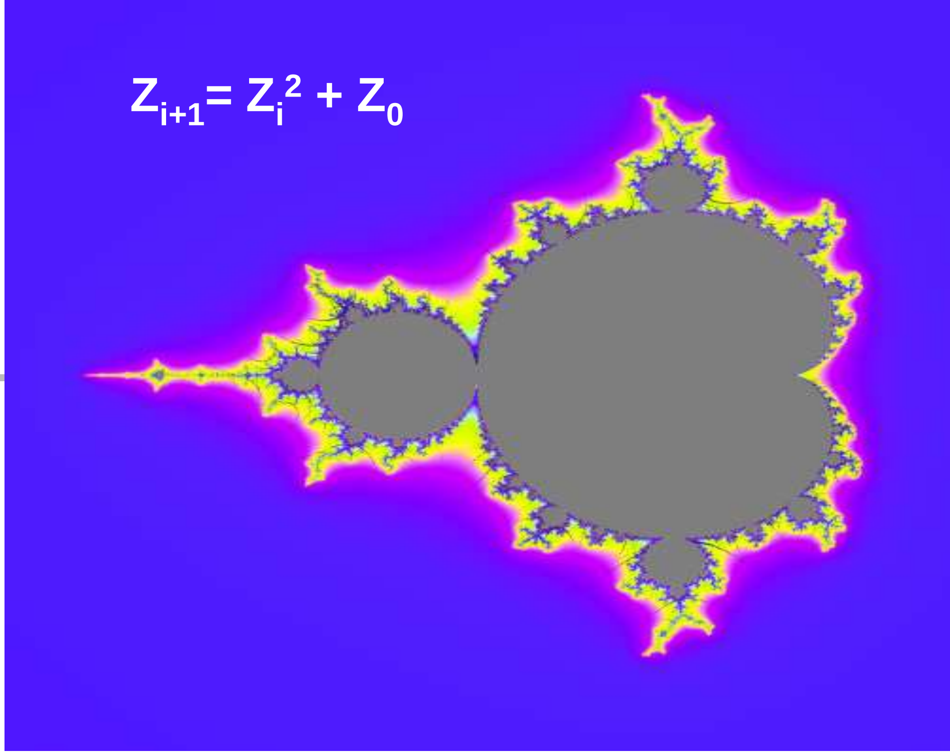
$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^{p} B_{i,k}(t) \cdot P_i \cdot w_i}{\sum_{i=0}^{p} B_{i,k}(t) \cdot w_i}$$

$t_i <= t <= t_{i+1}$;
$1 <= k <= n$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\forall k > 0, B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t)$$



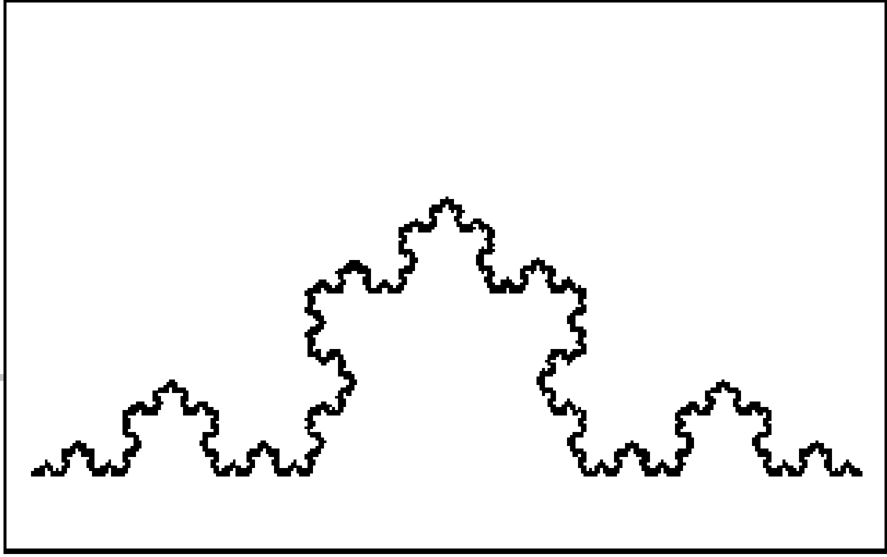


Фрактальные кривые: классификация

Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: *"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"*. Т.е. одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всей кривой.

1. Геометрические фракталы
2. Алгебраические фракталы
3. Стохастические фракталы

Фрактальные кривые: математическое описание



$$x_{k+1}=F_1(x_k,y_k)$$
$$y_{k+1}=F_2(x_k,y_k)$$

Общее описание 2D IFS

$$X' = aX + bY + c$$
$$Y' = dX + eY + f$$

Пример IFS

X' = 0.333*X+13.333 Y' = 0.333*Y+200	X' = 0.333*X+413.333 Y' = 0.333*Y+200	X' = 0.167*X+0.289*Y+130 Y' = -0.289*X+0.167*Y+256	X' = 0.167*X-0.289*Y+403 Y' = 0.289*X+0.167*Y+71

Фрактальные кривые:
пример реализации

```
Program Frac1;
Uses Crt;
Const
a : array[0..3,0..2,0..3] of integer =
                (((0,0,0,0),(0,20,0,0),(0,0,0,0)),
                ((85,0,0,0),(0,85,11,70),(0,-10,85,0)),
                ((31,-41,0,0),(10,21,0,21),(0,0,30,0)),
                ((-29,40,0,0),(10,19,0,56),(0,0,30,0)));

Var x,y,z : Integer;

procedure SetMode(Mode : Byte); assembler;
asm
  xor ax,ax
  mov al,[Mode]
  int 10h
end;

procedure
PutPixel(X,Y:Integer;Color:Byte);assembler;
asm
  mov  ah,0Ch
  mov  al,[Color]
  mov  cx,[X]
  mov  dx,[Y]
  mov  bx,[0]
  int  10h
end;
```

```
Procedure Threedfern;
Var
 b   : array[1..100] of Integer;
 k   : Byte;
 New_X, New_Y  : integer;
Begin
 repeat
 for k:=1 to 100 do
 begin
  b[k]:=random(5);
  if b[k]>3 then b[k]:=1;
 end;
 for k:=1  to 100 do
 begin
  new_x:=(a[b[k],0,0]*x+a[b[k],0,1]*y+a[b[k],0,2]*z) div 100 + a[b[k],0,3];
  new_y:=((a[b[k],1,0]*x+a[b[k],1,1]*y+a[b[k],1,2]*z) div 100) + a[b[k],1,3];
  z:= ((a[b[k],2,0]*x+a[b[k],2,1]*y+a[b[k],2,2]*z) div 100) + a[b[k],2,3];
  x:=New_X; y:=New_Y; Putpixel(350-x+z,380-y,2);
 end;
 until keypressed;
end;

Begin
     SetMode($12);
     Threedfern;
     SetMode(2);
End.
```