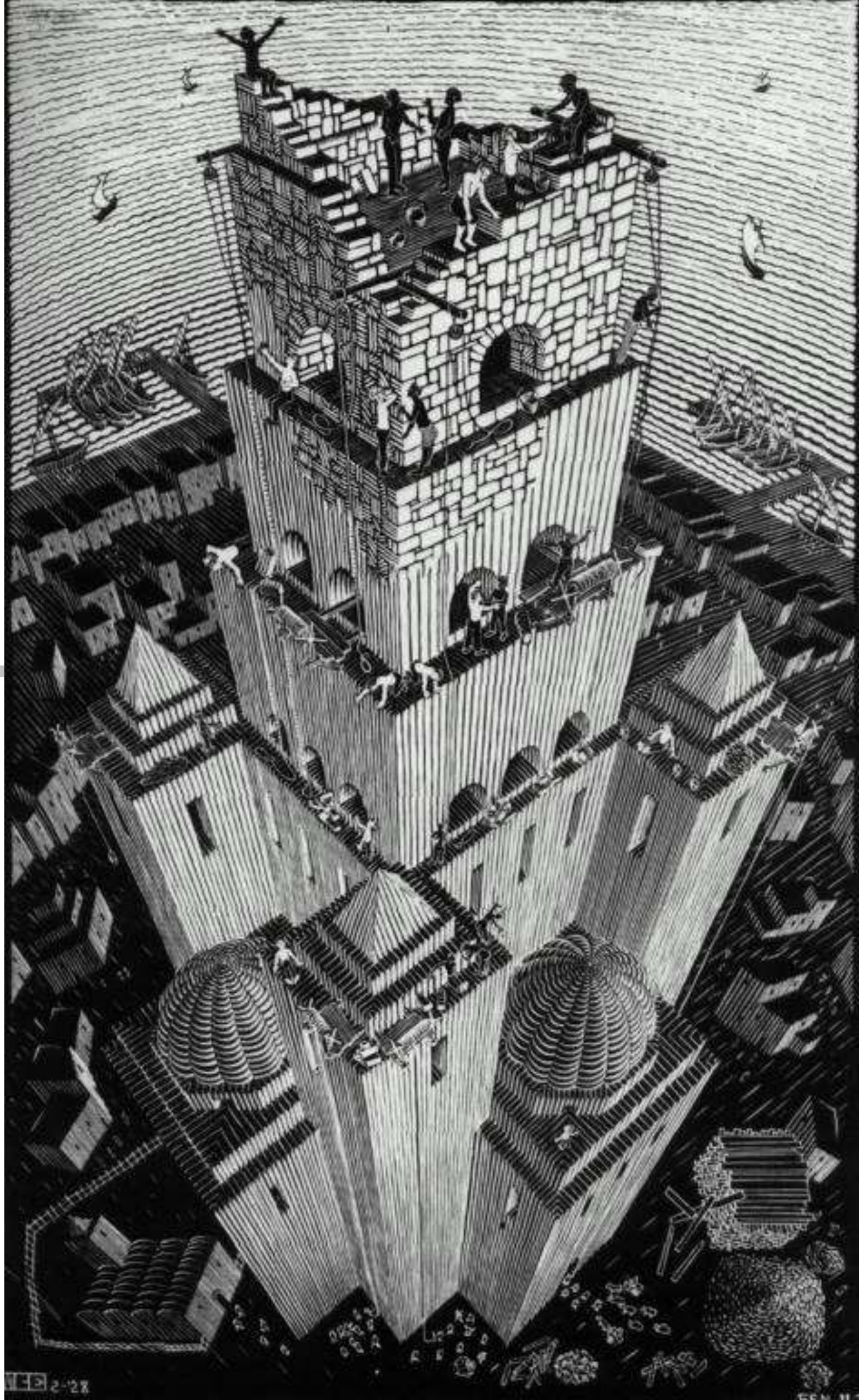
Компьютерная графика

лекция 3

Алгоритмические основы трехмерной графики



Преобразования координат

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, ..., k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, ..., k_n), \\ \quad ... \\ m_N = f_N(k_1, k_2, ..., k_n) \end{cases}$$

Если при всех i = 1, 2, …, N функции f_i – линейные относительно аргументов (k_1, k_2, …, k_n), то такие преобразования называют *линейными*, а при n = N – *аффинными*

$$f_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + ... + a_{in}k_n + a_{i,n+1}$$

Преобразования координат в явном и неявном виде широко используются в компьютерной графике с целью описания графического объекта в наиболее удобных координатных системах, для изменения масштаба элементов чертежа, построения проекций пространственных образов, направленной деформации объектов.

Метод однородных координат

V=(x, y, z, w)

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + d \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + e \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + f \end{cases}$$

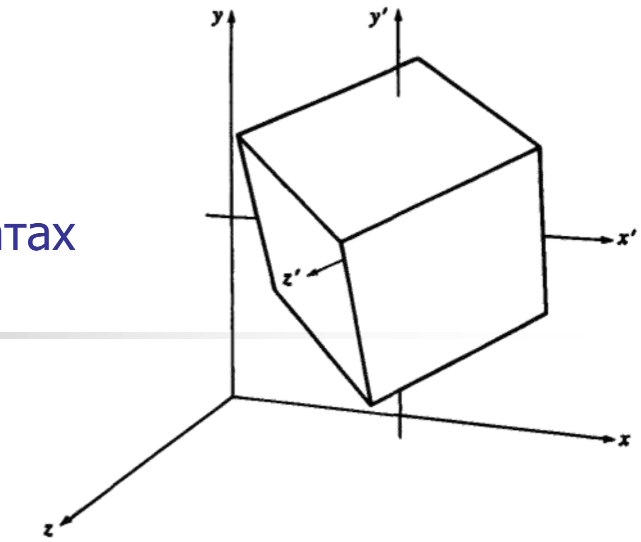
[X Y Z 1] = [(x/w) (y/w) (z/w) 1]

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Классическая матрица поворотов $\Rightarrow$ Вектор проекций $\Rightarrow$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & e \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f \\ m & n & k & \boxed{S} \end{bmatrix}$	$\Leftarrow$ Вектор сдвига (переноса) $\Leftarrow$ Общий масштаб

Использование механизма однородных координат позволяет применять единый математический аппарат для пространственных преобразований (поворотов, масштабирования, переноса) точек, прямых, квадратичных и бикубических поверхностей и линий

Преобразования в однородных координатах



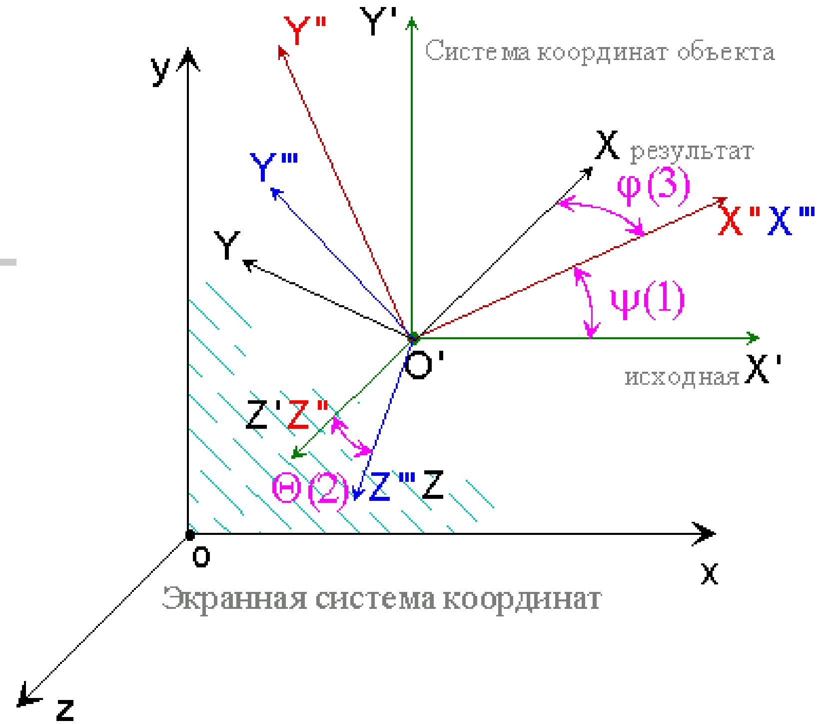
Композиции преобразований

Поворот на угол φ вокруг оси x:	Поворот на угол ψ вокруг оси y:	Поворот на угол θ вокруг оси z:
$M_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$M_y = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$M_z := \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{V}^* = \widehat{M}_x \cdot \widehat{M}_y \cdot \widehat{M}_z \cdot \vec{V}$$

Преобразования Эйлера

Любое заданное направление осей объектной системы координат можно получить, выполняя *три* поворота вокруг *двух* координатных осей, при этом для первого (ψ) и третьего (φ) поворота берется одна ось, которая в процессе преобразования сама поворачивается (θ).



$$X = (\cos\psi \cdot \cos\varphi - \sin\psi \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi)x + (-\cos\psi \cdot \sin\varphi - \sin\psi \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi)y + (\sin\psi \cdot \sin\theta)z$$

$$Y = (\sin\psi \cdot \cos\varphi + \cos\psi \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi)x + (-\sin\psi \cdot \sin\varphi + \cos\psi \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi)y + (-\cos\psi \cdot \sin\theta)z$$

$$Z = (\sin\theta \cdot \sin\varphi)x + (\sin\theta \cdot \cos\varphi)y + (\cos\theta)z$$

Преобразования в однородных координатах

Сдвиг на вектор (смещение):	Растяжение (сжатие):	Отражение:
$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$M_d := \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$M_{rxy} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Здесь осуществляется перенос начала системы координат объекта на вектор с трехмерными координатами (a, b, c)	Здесь ненулевые коэффициенты растяжения α, β, γ соответственно для осей x, y, z объектной системы координат	В данном случае осуществляется операция отражения относительно плоскости {x y}

Пример преобразования: задача

Построить матрицу вращения на угол φ вокруг прямой L, проходящей через точку $A(a, b, c)$ и имеющую направляющий вектор (l, m, n). Можно считать, что направляющий вектор прямой является единичным.

1-й шаг. Перенос на вектор $-A(-a, -b, -c)$

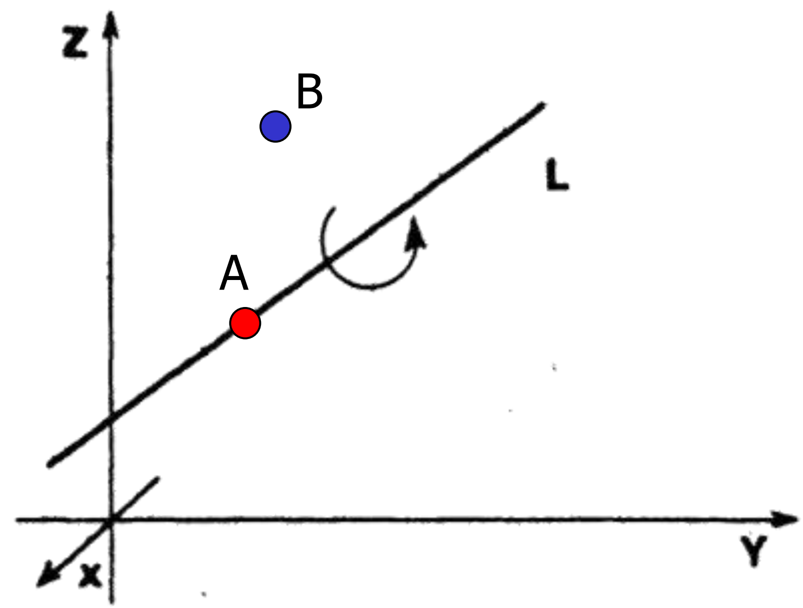
$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-й шаг. Совмещение оси аппликат с прямой L двумя поворотами ψ и Θ вокруг оси абсцисс и оси ординат.

$$\cos\psi = \frac{n}{d}, \quad \sin\psi = \frac{m}{d},$$

$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

3-й шаг. Вращение вокруг прямой L на заданный угол φ.



$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [R_y] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [R_z] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример преобразования (продолжение)

4-й шаг. Поворот вокруг оси ординат на угол -*Θ*.
5-й шаг. Поворот вокруг оси абсцисс на угол -*ψ*.
6-й шаг. Перенос на вектор *A*(*a*, *b*, *c*).

$$\hat{M} = \hat{T} \cdot \hat{R}_x \cdot \hat{R}_y \cdot \hat{R}_z \cdot \hat{R}_y^{-1} \cdot \hat{R}_x^{-1} \cdot \hat{T}^{-1}$$

Окончательно:

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos\varphi\left(1 - l^2\right) & l(1-\cos\varphi)\mathrm{m} + \mathrm{n}\sin\varphi & l(1-\cos\varphi)\mathrm{n} - \mathrm{m}\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)\mathrm{m} - \mathrm{n}\sin\varphi & \mathrm{m}^2 + \cos\varphi\left(1-\mathrm{m}^2\right) & \mathrm{m}(1-\cos\varphi)\mathrm{n} + l\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)\mathrm{n} + \mathrm{m}\sin\varphi & \mathrm{m}(1-\cos\varphi)\mathrm{n} - l\sin\varphi & \mathrm{n}^2 + \cos\varphi\left(1-\mathrm{n}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проецирование

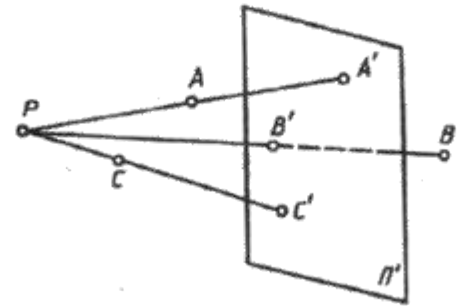
мировые координаты *x, y, z* → ***видовое преобразование*** → ***проецирование на картинную плоскость*** → **экранные координаты *X, Y (Z)***

Проецирование в общем случае – отображение точек, заданных в системе координат с размерностью N, в точки в системе с меньшей размерностью.

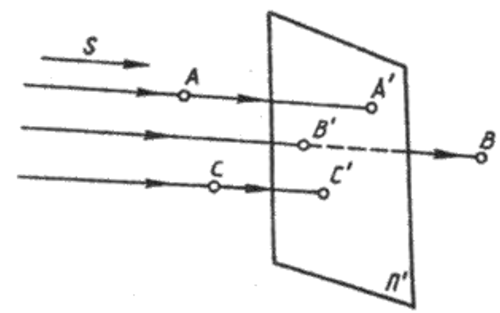
Проецирование

- Параллельное проецирование – проецирование с помощью параллельного пучка лучей
  - Аксонометрическое проецирование – параллельное проецирование на плоскость проекции (ГОСТ 2.317–69)
    - Ортогональное проецирование – все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции
    - Косоугольное проецирование – направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекции
- Центральное проецирование – все проецирующие лучи исходят из центра проекции

…



Проецирование:
центральное и параллельное

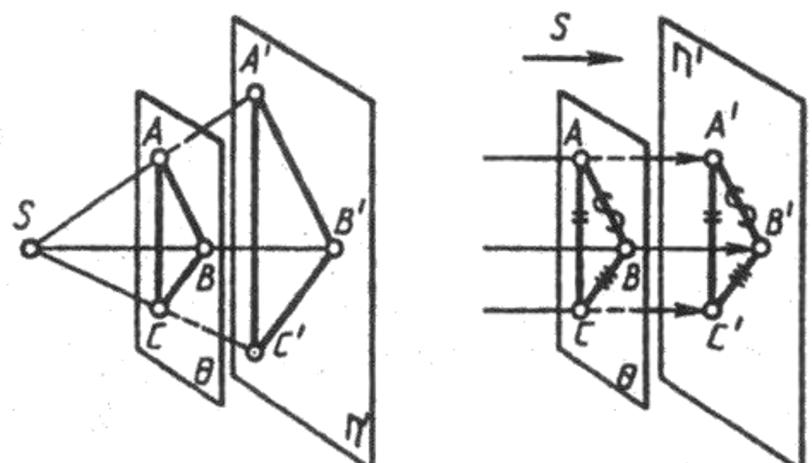


Проекции, полученные при центральном и параллельном проецировании, обладают рядом *общих свойств*:

1) **Проекция точки есть точка.** При заданном центре P (или направлении S) проецированию любой точки A пространства соответствует на плоскости проекций p' единственная точка A'.

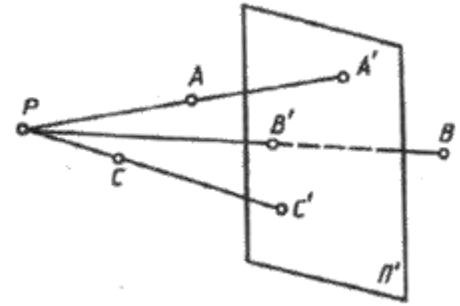
2) **Проекция прямой есть прямая.**

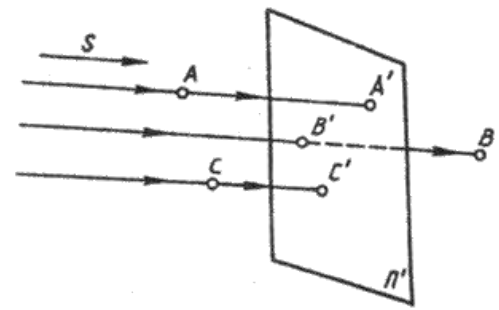
2.1) *При параллельном проецировании* сохраняется отношение величин отрезков прямой и их проекций: AB/BC = A'B'/B'C.
2.2) *При параллельном проецировании* проекции параллельных прямых есть прямые параллельные.



а б

Проецирование:
центральное и параллельное

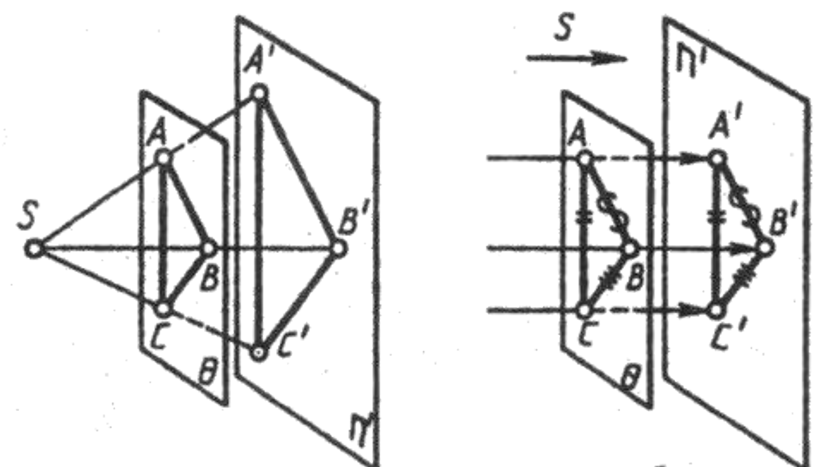




3) **Проекцией плоскости является плоскость**.

4) Если плоскость параллельна плоскости проекций, то проекции ее плоских фигур при центральном проецировании *подобны* самим фигурам, а при параллельном — *равны* им.

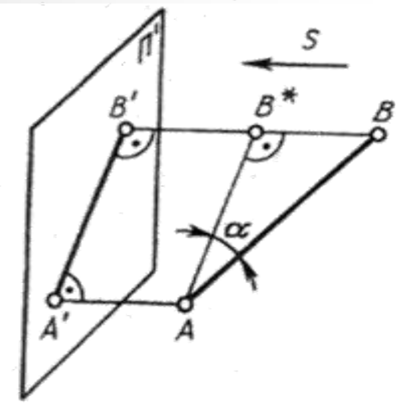
5) При параллельном проецировании проекция фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскости проекций.



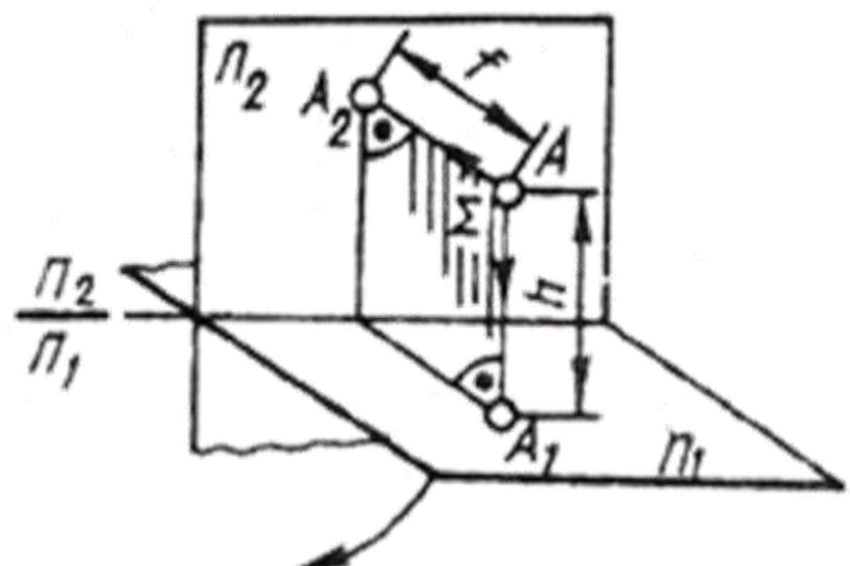
а б

Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай проецирования параллельного, когда все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций.

Проецирование: ортогональное



Положение точки в пространстве однозначно определяется **двумя** проекциями. Одну из них принято располагать горизонтально (*горизонтальная плоскость проекций*), другую – вертикально (*фронтальная плоскость проекций*). Иногда используется третья плоскость – перпендикулярная двум первым (*профильная плоскость проекций*).



Проецирование: аксонометрическое

Аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования разделяют на:

1) *косоугольные*, когда направление проецирования не перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций;

2) *прямоугольные*, когда направление проецирования перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций.

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg^2\phi$$

В зависимости от сравнительной величины коэффициентов искажения по осям различают три вида аксонометрии:

1) *изометрия:* u = v = w
2) *диметрия:* u ≠ v = w или u = v ≠ w
3) *триметрия:* u ≠ v ≠ w

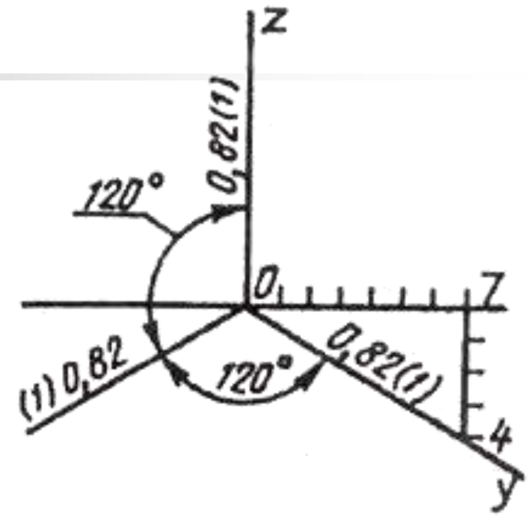
ϕ — угол между направлением проецирования и плоскостью аксонометрических проекций. В случае $\phi = 90^\circ$ $u^2 + v^2 + w^2 = 2$.

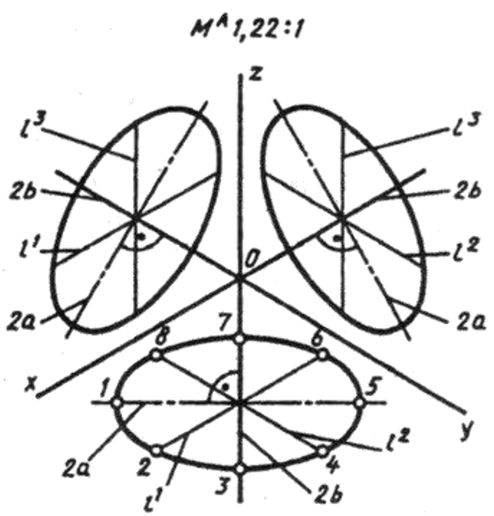
Проецирование

- Параллельное проецирование – проецирование с помощью параллельного пучка лучей
  - Аксонометрическое проецирование – параллельное проецирование на плоскость проекции (ГОСТ 2.317–69)
    - Ортогональное проецирование – все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции
      - Изометрия – все три коэффициента искажения равны между собой ($u = v = w$)
      - Диметрия — два коэффициента искажения равны между собой и отличаются от третьего ($u \neq v = w$ или $u = v \neq w$)
      - Триметрия – все три коэффициента искажения не равны между собой ($u \neq v \neq w$).
      - Ортографическое проецирование – направление проекции совпадает с одним из векторов мировой системы координат
    - Косоугольное проецирование – направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекции
      - Фронтальная изометрическая проекция – угол наклона проектирующих лучей к плоскости экрана равен 45°
      - Фронтальная диметрическая проекция – масштаб по одной из осей вдвое меньше
- Центральное проецирование – все проецирующие лучи исходят из центра проекции
  - …

Проецирование: изометрия

При прямоугольном проецировании может быть получена только **одна** изометрическая проекция и **бесконечное множество** диметрических и триметрических проекций.





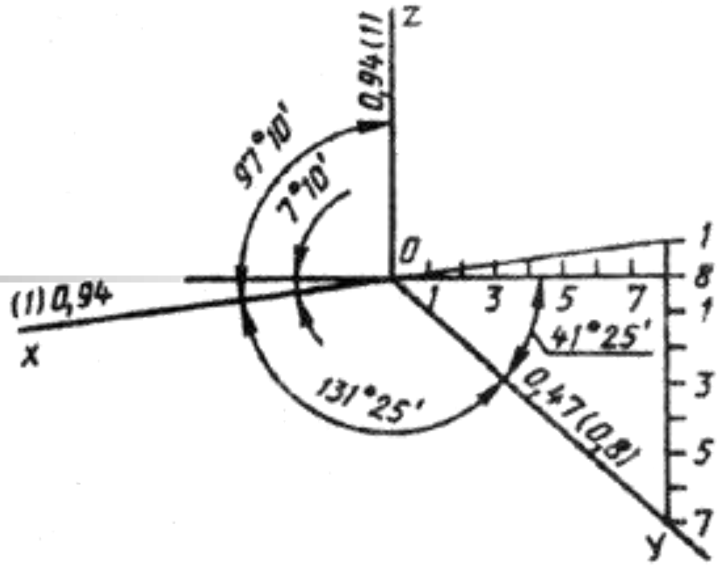
Прямоугольная изометрия

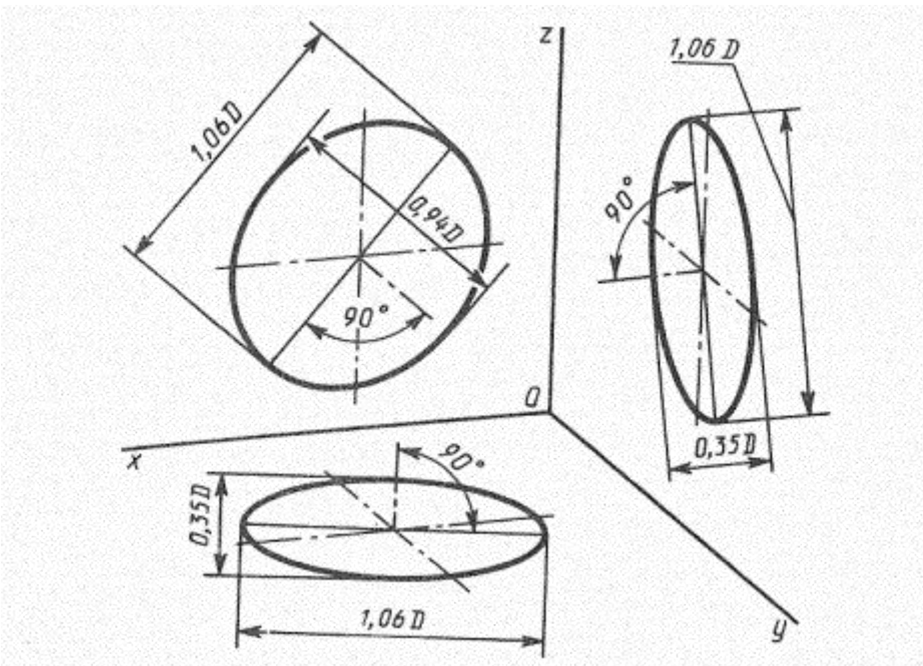
$3u^2 = 2$,

$u = (2/3)^{1/2}$ и $u = v = w = 0{,}82$.

ГОСТ 2.317—69 : $u = v = w = 1$.

Проецирование:
диметрия





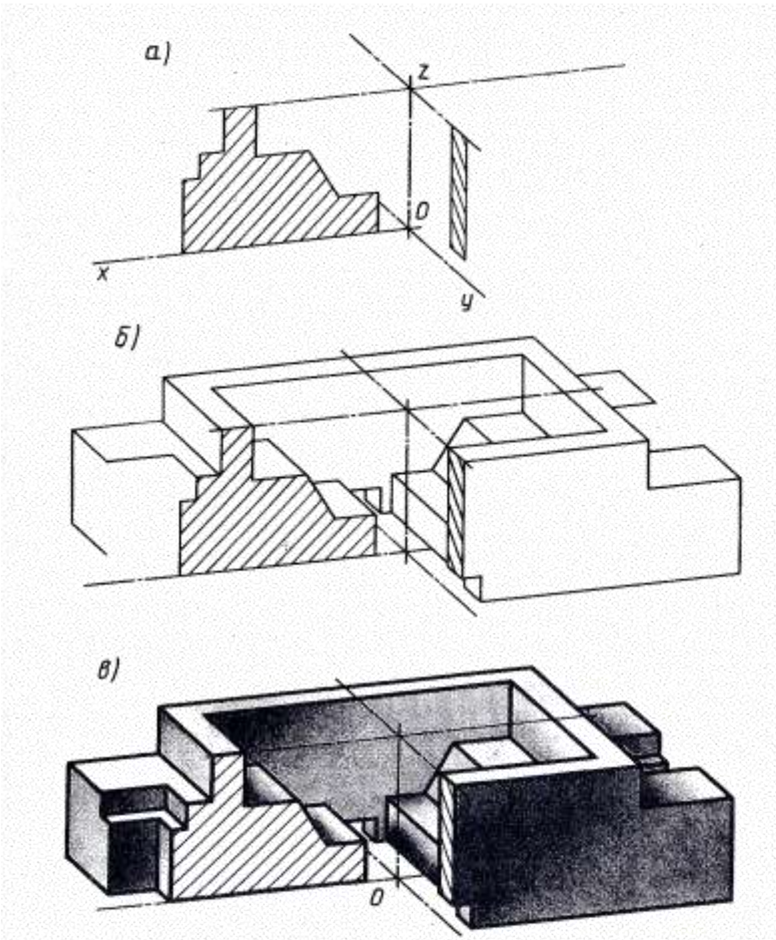
Прямоугольная диметрия

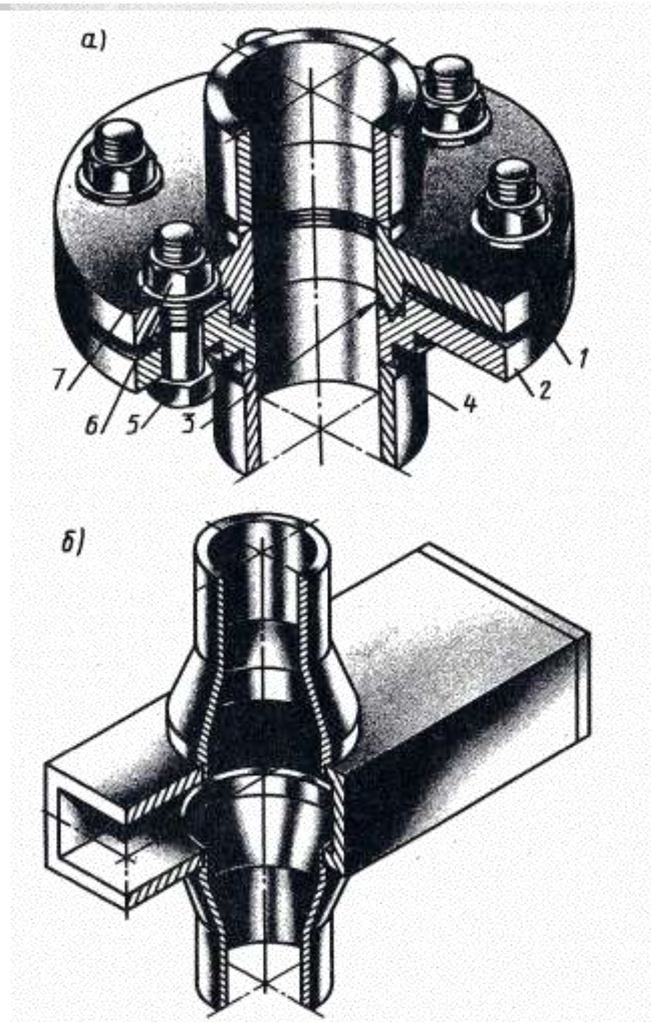
u = w, v = 0.5u

$2u^2 + (u/2)^2 = 2$,
$u = w = (8/9)^{1/2} = 0.94$
$v = 0.47$.

ГОСТ 2.317—69 : *u* = *w* = 1, v=0.5.

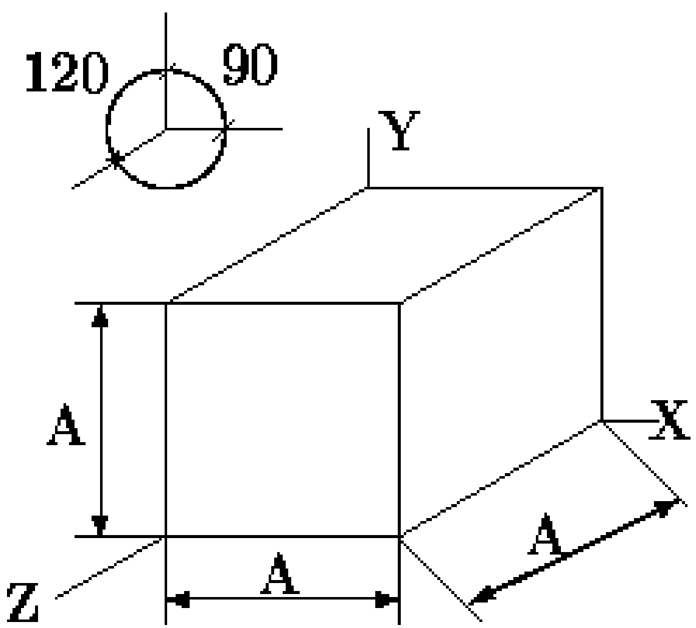
Прямоугольные проекции:
примеры чертежей

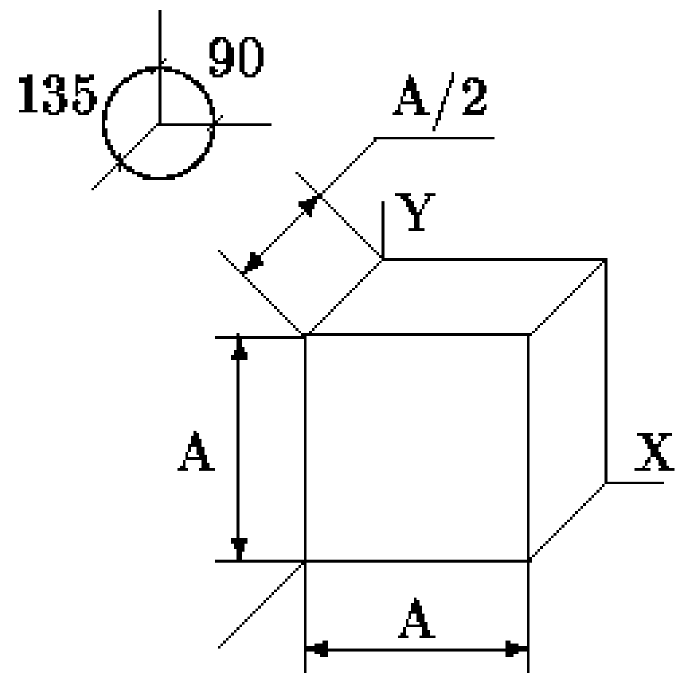




Проецирование:
свободная и кабинетная проекции

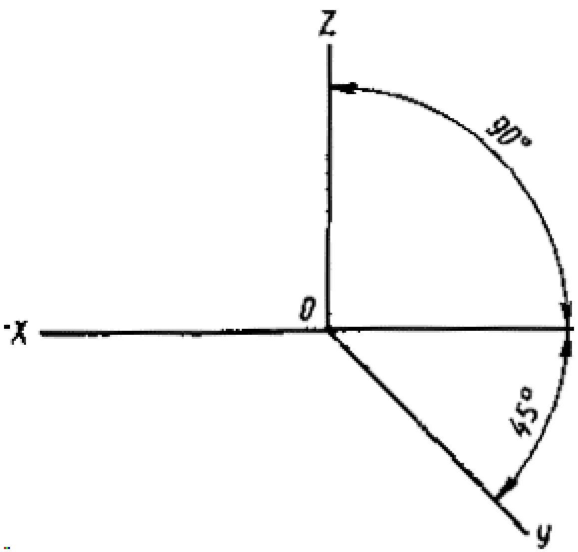
В *косоугольных проекциях* выделяют два вида: *свободную* – когда угол наклона проектирующих лучей к плоскости экрана равен половине прямого, и *кабинетную* – частный случай свободной проекции, при котором масштаб по третьей оси вдвое меньше.



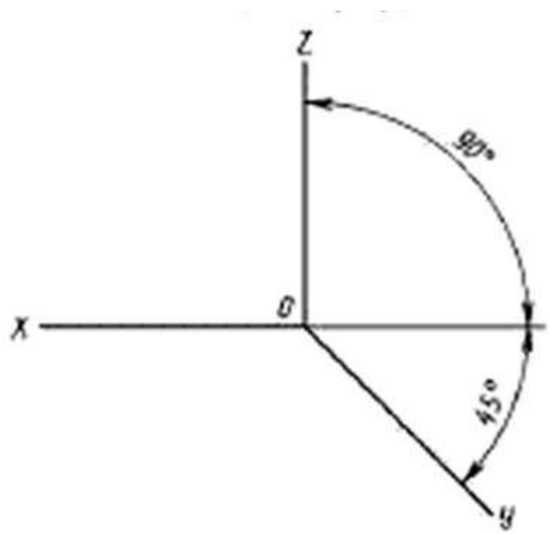


Проецирование:
косоугольные проекции по ГОСТ 2.317-69

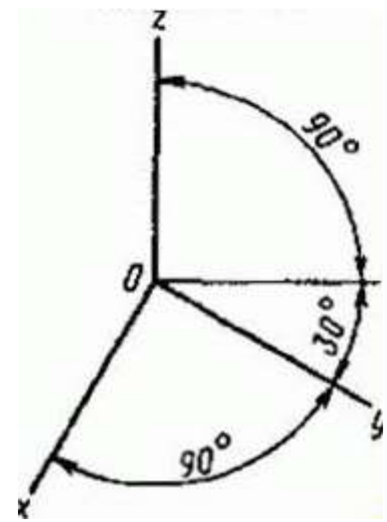
Фронтальная изометрическая проекция ($u = v = w = 1$)



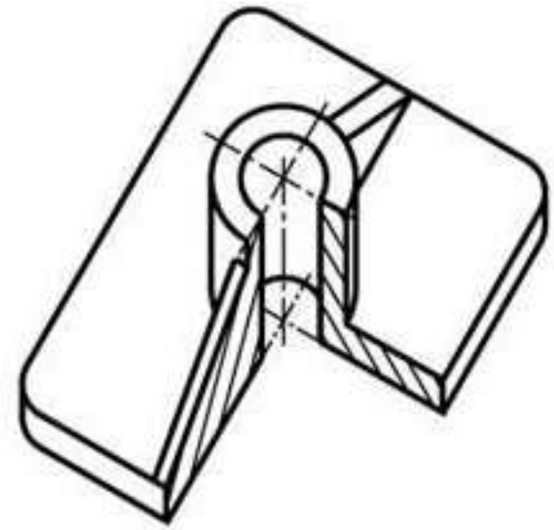
Фронтальная диметрическая проекция ($u = w = 1$, $v = 0.5$)

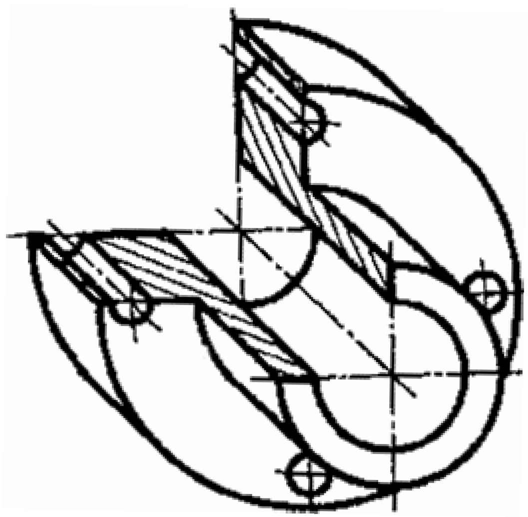


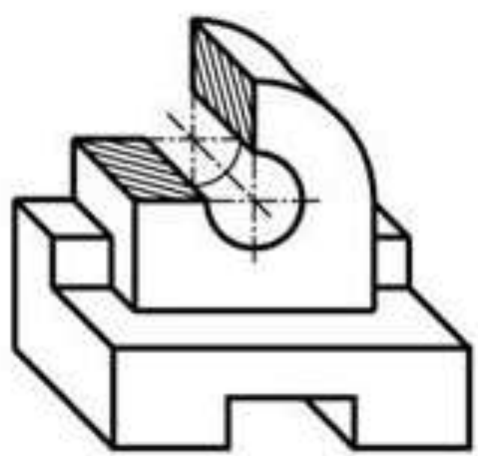
Горизонтальная изометрическая проекция ($u = v = w = 1$)

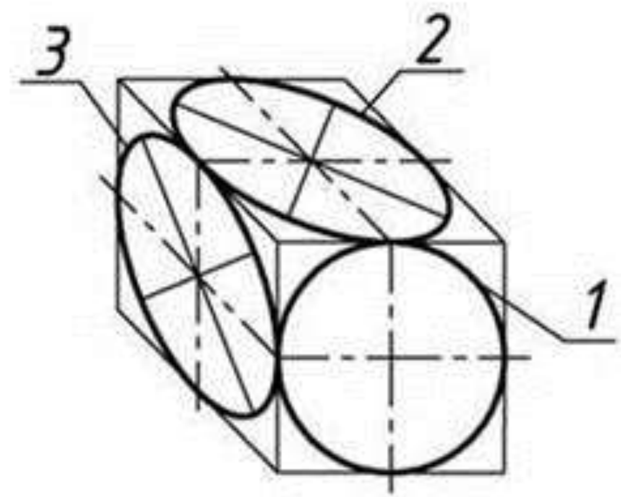


Косоугольные проекции:
примеры чертежей









Проецирование в однородных координатах

$$\mathbf{M}_{orth}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Ортографическое проецирование вдоль Z на плоскость XY

$$\mathbf{M}_{ax}=\mathbf{M}_{\varphi}\cdot\mathbf{M}_{\psi}\cdot\mathbf{M}_{orth}=\begin{bmatrix}\cos\psi&\sin\varphi\sin\psi&0&0\\0&\cos\psi&0&0\\\sin\psi&-\sin\varphi\cos\psi&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

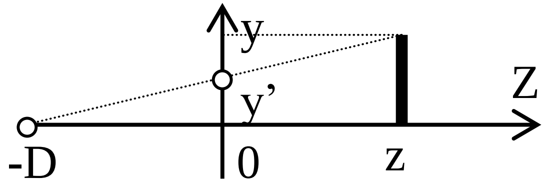
Общий случай аксонометрической проекции.
Для изометрии ϕ = 35°; ψ = -45°
Для диметрии ϕ = 20°; ψ = -20°

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\0&1&\beta&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

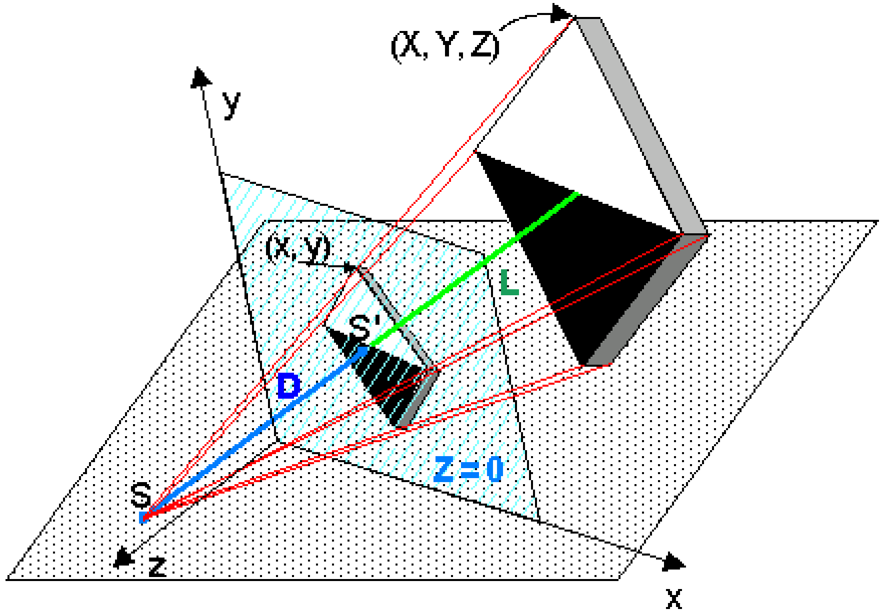
Косоугольное проецирование

$\alpha=\beta=\cos\frac{\pi}{4}$ - фронтальная изометрическая

$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$ - фронтальная диметрическая



Проецирование:
центральное (перспективное)



В параметрическом виде:

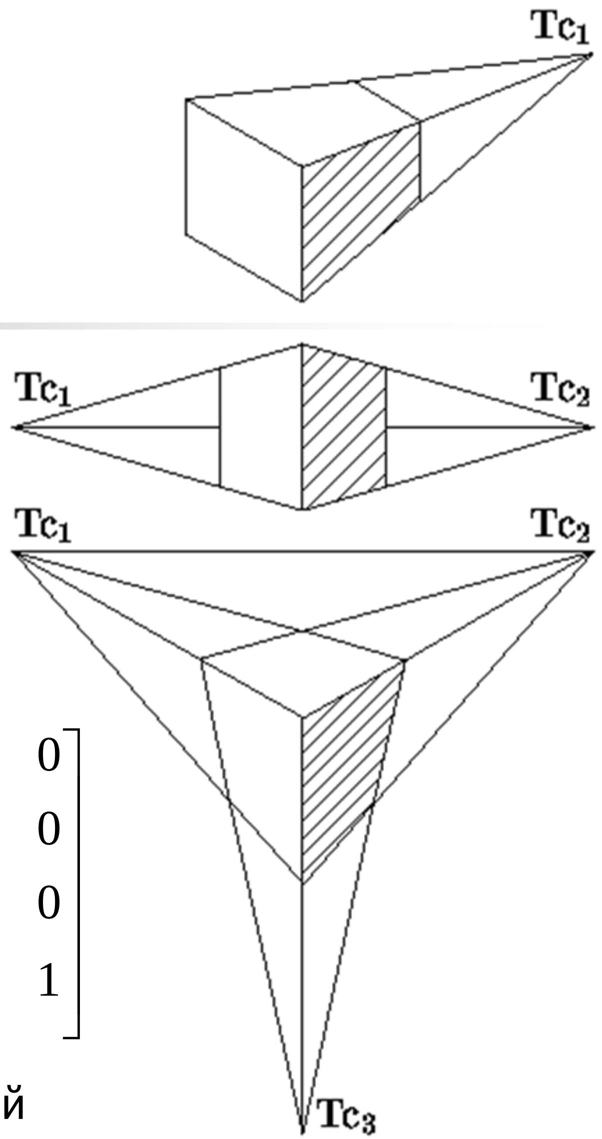
$x = X \cdot t$; $y = Y \cdot t$; $z = D + (Z-D) \cdot t$

$0 \le t \le 1$

$t_{(Z=0)} = 1/(1-Z/D)$

$$\boxed{x = X/(1-Z/D);\ y = Y/(1-Z/D)}$$

Проецирование
в однородных координатах



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{D} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-\frac{z}{D} \end{bmatrix}$$

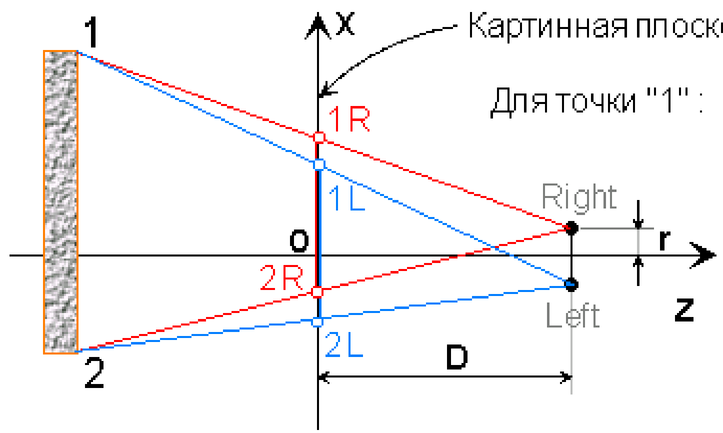
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{c} & 1 \end{bmatrix}$$

Центральное проецирование: одноточечное и общий случай

Проецирование:
специальные проекции

Специальные перспективные проекции – проекции на цилиндрические, конические, сферические и др. поверхности с последующим разворачиванием полученной проекции на плоскость.

Еще один вид специальных проекций – *стереоскопические*. Простейший вид стереоизображения образуется с помощью стереопары – двух перспективных проекций, построенных каждая для своего «глаза».



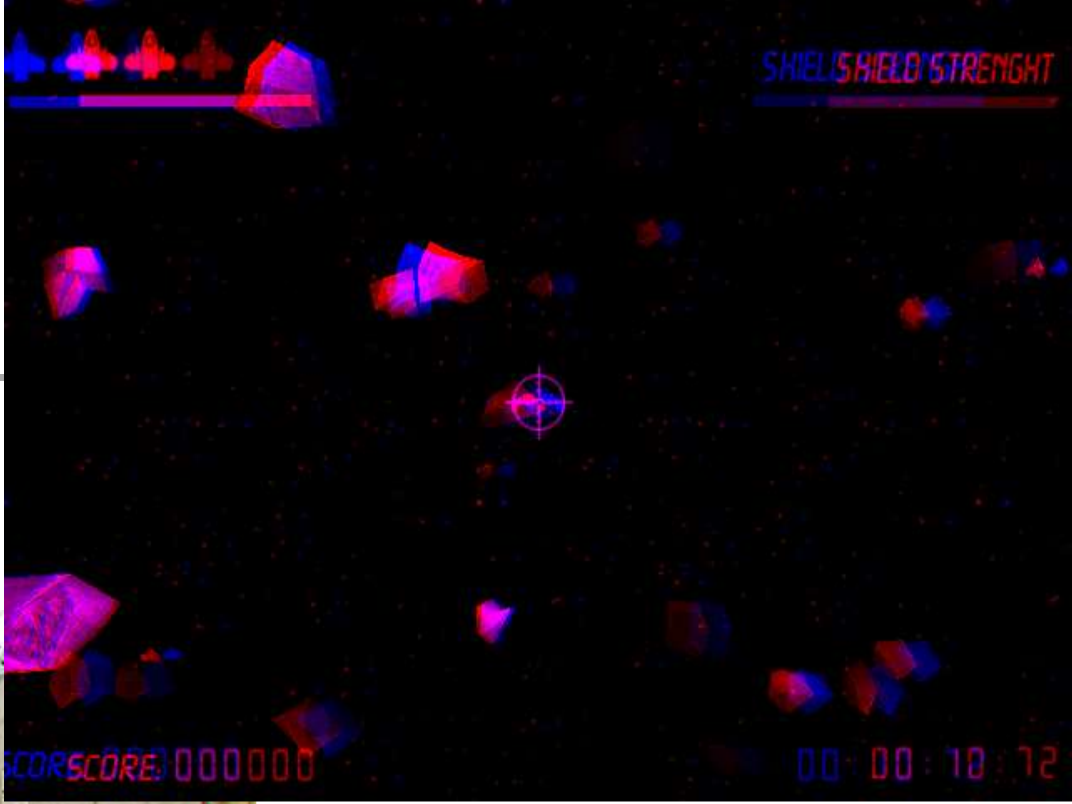
Для точки "1":

$$x_{1R} = \frac{(X_1 - r)\cdot D}{D - Z_1} + r$$

$$x_{1L} = \frac{(X_1 + r)\cdot D}{D - Z_1} - r$$

$2r$ – расстояние между "глазами" стереосистемы

Проецирование: пример стереоизображения



Проецирование:
стереограмма